**Урок–лекция "Уравнения и неравенства с параметром". 11-й класс**

**Цели:**

***Образовательная:***

* систематизировать и обобщить знания о решении уравнения с параметром;
* показать основные приемы решения таких уравнений.

***Развивающая:*** расширить и углубить изучение различных приемов решения уравнений с параметром.

***Воспитательная:*** показать значимость зависимости ответа в задаче с параметром от выбранного значения параметра.

**Используемые методы обучения – их применение**.

* Объяснительно-иллюстративный.
* Обобщения, аналогии и сравнения.
* УДЕ – создание ключевых задач, аналогия изображений на плоскости.
* Интегрированный – сопоставление алгебры и геометрические интерпретации, слайды.

**Формирование общеучебных умений и навыков:**

* Выделение существенных признаков изучаемых объектов;
* Выработка практических навыков;
* Используемые методы работы с аудиторией: работа в диалоговом режиме;
* Психологические аспекты урока;
* Создание комфортной рабочей атмосферы;
* Побуждение к активной диалоговой деятельности.

**Ход урока**

**Введение**. *Вступительное слово учителя*.

Уравнения стали привычной частью вариантов вступительных экзаменов ЕГЭ.

Уравнения с параметром вызывают серьезные трудности логического характера.
Каждое такое уравнение – это, по существу, краткая запись семейства уравнений. Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства невозможно, но тем не менее каждое из них должно быть решено. Поэтому возникает необходимость в рассмотрении системы понятий и поиске методов решения уравнений с параметрами (линейных, рациональных и т.д.)

Пусть дано уравнение F(х;а) = 0. Если придать параметру а какое – либо фиксированное значение, то данное уравнение можно рассматривать как «обычное» уравнение с одной переменной.

**Поставим задачу**: Выяснить, какой может быть ситуация при выбранном значении параметра?

*Работа с учащимися в диалоговом режиме.*

|  |
| --- |
| Учитель задает вопросы, добивается верных ответов, выполняет чертеж на доске. |
| Обычное линейное уравнение с одной переменной сколько может иметь решений?Уравнение F(а; х) = 0 что собой представляет?Как осуществляется его решение? |
| Итак, при выбранном значении параметра возможна одна из ситуаций;Уравнение (система):* не имеет смысла;
* не имеет корней (решений);
* имеет одно, два, три….. корня (решения);
* имеет бесконечное множество (решений).

Таким образом, ответ в задаче с параметром существенно зависит от выбранного значения а. |

**Обозначим основные проблемы:**

1. Установить основные понятия уравнений с параметрами.
2. Для каждого вида уравнений школьного курса математики установить общий метод решения соответствующих уравнений с параметрами – единый как для одного, так и для двух параметров.
3. Рассмотреть примеры заданий на исследование уравнений.
4. Каково установление числа корней уравнений.
5. Нахождение общего корня двух уравнений – в чем его суть?
6. Геометрические интерпретации.

**I этап – решение первой проблемы**.

*Работа с учащимися в диалоговом режиме*.

Какие вопросы вы себе определите для установления основных понятий?

|  |  |
| --- | --- |
| * Что такое задача с параметром?
* Что является областью допустимых значений параметра?
* Что значит решить задачу с параметром?
* Сколько видов задач с параметрами существует?
* Что необходимо учитывать при их решении?

  | Появляется слайд и конспект- Задача с параметром – это множество задач, каждая из которых получается из условия подстановкой конкретного значения параметра.- Область допустимых значений параметра – это множество значений параметра, при подстановке которых получается задача, имеющая смысл.- Решить задачу с параметром означает для любого допустимого значения параметра найти множество всех решений данной задачи.- Рассматривать мы с вами будем задачи с параметром двух основных типов.В задачах I типа требуется для каждого значения параметра решить задачу.Для этого необходимо:* разбить ОДЗ параметра на части, на каждой из которых задачу можно решить одним и тем же способом;
* на каждой из полученных частей решить задачу.

В задачах II типа требуется найти все значения параметра, при которых выполнены те или иные заданные условия.- Ответ в задаче с параметром – это описание множества ответов к задачам, полученных при конкретных значениях параметра. |

Например.

**1) Решить уравнение а (а – 1) = а – 1.**

*Решение*. Перед нами линейное уравнение, имеющее смысл при всех допустимых значениях а. Будем решать его «как обычно»: делим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном. Но всегда ли возможно деление?

Нет.

Делить на ноль нельзя. Придется рассмотреть отдельно случай, когда коэффициент при неизвестном равен о. Получим:

1. а = 1, тогда уравнение примет вид 0·х = 0, где х – любое число;
2. а = 0, тогда 0∙х = - 1 – уравнение корней не имеет;
3. а 0, а 1, тогда а (а – 1)·х = а – 1 х = .

Ответ: 1) если а 0, а 1, то х = ;

2) если а = 1, то х – любое число;

3) если а = 0, то корней нет.

**2) Решить уравнение (а – 1)х2 + 2 (2а – 1)х + 4 а + 3 = 0.**

*Решение*. Рассмотрим два случая:

1. а = 1 – получим линейное уравнение 2х + 7 = 0, откуда х = - 3,5;
2. а 1 – получим квадратное уравнение.

Рассмотрим дискриминант: D = (2а – 1)**2** – (а – 1)(4а + 3) = - 3а + 4.

Далее, если а > , то D < 0 и уравнение корней не имеет.

Если же а , то х1,2 = .

Ответ: 1) если а > , то корней нет;

2) если а = 1, то х = - 3,5;

3) если а и а1, то х1,2 = .

**II этап – решение второй проблемы**.

Рассмотрим способ классификации частных уравнений с помощью модели общих решений.
Появляется слайд.

Например. В рациональном уравнении функция f1(а) = является общим решением для тех значений параметра, для которых . Поскольку



общее решение уравнения на Аf1 = }.

Функция f2(а) = есть общее решение уравнения на множестве Аf2 = .
Построим модель общих решений в следующем виде



На модели выделяем все типы частных уравнений: ; ; .

Итак, на примерах рассмотрены основные понятия уравнений с параметрами: область допустимых значений; область определения; общие решения; контрольные значения параметров; типы частных уравнений.

На базе введенных параметров определим общую схему решения всякого уравнения F(а;х) = 0 с параметром а (для случая двух параметров схема аналогична):

* устанавливается область допустимых значений параметра и область определения;
* определяются контрольные значения параметра, разбивающие область допустимых значений параметра на области однотипности частных уравнений;
* для контрольных значений параметра соответствующие частные уравнения исследуются отдельно;
* находятся общие решения х = f1(а), …, fk(а) уравнения F(а;х) =0 на соответствующих множествах Аf1, ……, Аfk значений параметра;
* составляется модель общих решений, контрольных значений параметра в следующем виде (на слайде);



* на модели выделяются промежутки значений параметра с одинаковыми решениями (области однотипности);
* для контрольных значений параметра и выделенных областей однотипности записываются характеристики всех типов частных решений.

**III этап – примеры заданий на исследование уравнений.**

Рассмотрим примеры решения задач с параметрами 2 типа.

Особенно часто встречаются задачи на расположение корней квадратного уравнения. При их решении хорошо «работают» графические иллюстрации. Расположение корней относительно заданных точек плоскостью определяется направлением ветвей соответствующей параболы, координатами вершины, а также значениями в заданных точках.

*Например.*

1) При каких значениях параметра а уравнение (а2 + а + 1)х2 + (2а – 3)х + а – 5 = 0 имеет два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1?

*Решение*. Пусть f(х) = (а2 + а + 1)х2 + (2а – 3)х + а – 5. Так как а2 + а + 1 >0, то для квадратичной функции f(х) условие задачи может выполняться только при условии f (х) < 1.



Решая неравенство f(1) = а2 + 4а – 7 < 0, получим, что -2 - < а < - 2 + .

*Ответ*: -2 - < а < - 2 + .

2) **При каких значениях параметра m корни уравнения (m – 1)х2 – 2mх + m + 3 = 0 положительны?**

*Решение*. Пусть f(х) = (m-1)х2 - 2 mх + m + 3 тогда:

1) если, m = 1,то -2х + 4=0, х= 2- корень положителен;

2) если m 1, то с помощью рисунка можно получить следующие соотношения:




Рассмотрим 2 случая:

1) если 1,5 m > 0, тогда из 2 и 3 неравенств последней системы получим, что m > 1, т.е. окончательно 1,5 m > 1;

2) если m < 0, тогда из неравенства (m-1)m > 0 получим, что m-1 < 0, откуда m + 3 < 0, т.е. окончательно m < -3.

*Ответ*: m (-; -3) 

**IV этап - рассмотрим задачи на установления числа корней уравнения.**

***Пример 1.*** При каких значениях параметра, а уравнение 2 cos2x – (2а + 9)cosx + 9а = 0 не имеет корней.

*Решение.* Пусть у = cosх, тогда исходное уравнение примет вид 2у2 – (2 а + 9)у + 9а = 0, корни которого у1 = а, у2 = 4,5. Уравнение cosх = 4,5 корней не имеет, а уравнение cosх = а не имеет корней, если > 1.

*Ответ*: (- ; -1) (1; ).

***Пример 2*.** Найдите все значения параметра а, при которых уравнение не имеет корней.

*Решение*. Данное уравнение равносильно системе: .

Уравнение не имеет решения в двух случаях: а = и 

Ответ: .

***Пример 3***. При каких значениях параметра а уравнение имеет единственное решение?

*Решение*. Решение уравнения может быть единственным только, если х = 0. Если х = 0,то а2 -1 = 0, и а = 1.

Рассмотрим 2 случая:

1) если а = 1, то х2 - = 0 – корней три;

2). Если а = -1, то то х2 + = 0, х = 0 - единственный корень.

***Пример 4.*** При каких значениях параметра а уравнение имеет 2 корня?

*Решение.* Данное уравнение равносильно системе: . Выясним, когда квадратное уравнение х2 – х – а = 0 имеет 2 неотрицательных корня.

Полученное уравнение имеет два корня, если 1+ 4а > 0; они неотрицательны, если

0 > а > - .

*Ответ*: (- ; 0] .

Во многих случаях при установлении числа корней уравнении имеет значение симметрия.

**V этап - нахождение общего корня двух уравнений.**

***Пример 1.*** При каких значениях параметра а уравнение х2 + 3х + 7а -21 =0 и х2 +6х +5а -6 =0 имеют общий корень?

*Решение.* Исключим параметр а из полученной системы. Для этого первое уравнение умножим на -5, второе - на7, а результаты сложим. Получим: 2х2 + 27х +63 =0, корни которого х1 = -3, х2 = -10,5. Подставим корни в одно из уравнений и найдем значение параметра а.

*Ответ*: 3 и – 8,25.

***Пример 2.*** При каких значениях параметра а уравнение х2 – ах + 2 = 0 и 3х2 + (а - 9)х+ 3=0 равносильны?

*Решение*. Как известно уравнения равносильны, если множество их корней совпадают. Рассмотрим 2 случая.

1) Уравнения не имеют корней (множество корней пусто). Тогда их дискриминанты отрицательны:



Система неравенств решений не имеет.

2) Уравнения имеют общие корни. Тогда 

Следовательно, данные уравнения могут иметь общие корни только при а = 3 или а = .

Проверить самостоятельно!

**VI этап – геометрические интерпретации.**

Решение задач с параметрами может существенно облегчить использование графиков.

***Пример 1***. Решите уравнение в зависимости от параметра а: .

Решение. Понятно что при а 0:

.

Все ли корни подходят. Чтобы это выяснить, построим график функции а =.
Количество корней можно увидеть на рисунке:



1. если а < 0, то корней нет;
2. если а = 0 и а > 0, то 2 корня.

Найдем эти корни.

При а = 0 получим х2 – 2х – 3 = 0 и х1 = -1, х2 = 3; при а > 4 это корни уравнения х2 – 2х – 3 – а = 0.

Если 0 < а < 4 – все 4 корня подходят.

Если а = 4 – три корня: 
*Ответ*: 1) если а < 0, то корней нет;

2) если а = 0, то х1 = -1, х2 =3;

3) если 0 < a < 4, то х1,2,3.4 = 1 ;

4) если а = 4, то х1 = 1; х2,3 = 1 ;

5) если а > 4, то х1,2 = 1 .

***Пример 2***. При каких значениях а уравнение имеет более двух корней?

*Решение*. Если подставить х = 0 в исходное уравнение, то получим 6 = 6, это означает, что х = 0 является решением уравнения при любом а.

Пусть теперь х 0, тогда можно записать . Выясним знаки выражений 2х + 3 и 2х – 3.



Раскроем модули: а = (1)

В плоскости х0а построим множество точек (х;а), координаты которых удовлетворяют соотношению (1).



Если а = 0, то уравнение имеет бесконечное множество решений на промежутке , при других значениях а число решений уравнения не превышает двух.

*Ответ*: а = 0.

**Тестовый контроль**

|  |  |
| --- | --- |
| **1 вариант** | **2 вариант** |
| **1) Решите уравнение: 0 · х = а***Ответы*: а) при а ≠ 0, х = 1, при а = 0, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0000.gifRб) при а = 0, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0001.gifR, при а ≠ 0 корней нетв) при а = 0 нет корней, при а ≠ х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image009_0000.gif | **1) Решить уравнение: а х = а.***Ответы*: а) при а ≠ 0, х = 1, при а = 0, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0002.gifRб) при а = 0, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0003.gifR, при а ≠ 0 корней нетв) при а = 0 нет корней, при а ≠ х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image009_0001.gif |
| **2) Решит уравнение: (в – 2)·х = 5 + в.***Ответы:*а) при в = 2 нет корней; при в ≠2, х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image159.gif;б) при в = -2 нет корней, при в ≠-2 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image161.gifв) при в = -1 нет корней, при а ≠ - 1 http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image163.gif | **2) Решите уравнение (в + 1)·х = 3 – в**. *Ответы:*а) при в = 2 нет корней; при в ≠2, х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image159_0000.gif;б) при в = -2 нет корней, при в ≠-2 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image161_0000.gifв) при в = -1 нет корней, при а ≠ - 1 http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image163_0000.gif |
| **3) При каких значениях параметра с уравнение имеет бесконечное множество решений?****с·(с + 1)·х = с2 – 1**.*Ответ*: а) при с = -1, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0004.gifR,б) при с = 2, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0005.gifR,в) при с = - 1, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0006.gifR, | **3) При каких значениях параметра с уравнение имеет бесконечное множество решений?****(с2 – 4)·х = (с – 2)·(с+ 1).***Ответ*: а) при с = -1, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0007.gifR,б) при с = 2, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0008.gifR,в) при с = - 1, х http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image059_0009.gifR, |
| **4) При каких значениях параметра m уравнения не имеет решений?****http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image167.gif.***Ответы*: а) при m = 6 нет корней;б) при m = 7 нет корней;в) при m = 8 нет корней. | **4) При каких значениях параметра m уравнения не имеет решений?****http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image169.gif.***Ответы*: а) при m = 6 нет корней;б) при m = 7 нет корней;в) при m = 8 нет корней. |
| **5) Решить уравнение http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image171.gif.***Ответы*:а) при а = 0 нет корней, при а ≠ 0 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image173.gif;б) при а = 0 нет корней, при а ≠ 0 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image175.gif;в) при а = 0 нет корней, а ≠ 0 х = - 2а. | **5) Решить уравнение http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image177.gif.***Ответы*:а) при а = 0 нет корней, при а ≠ 0 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image173_0000.gif;б) при а = 0 нет корней, при а ≠ 0 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image179.gif;в) при а = 0 нет корней, а ≠ 0 х = - 2а. |
| **6) При каких значениях параметра n уравнение имеет один корень?****nх2 + 4х + (5 – n) = 0.***Ответы:*а) при n = 0 х =1, при n = 2 х = 2, при n =2 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image181.gif;б) при n = 0 х = -http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image183.gif, при n = 1 х = 2, при n = - 4 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image185.gif;в) при n= 0 х = - http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image187.gif, при n = 1 х = - 2, при n =4 х = - http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image185_0000.gif. | **6) При каких значениях параметра n уравнение имеет один корень?****nх2 + 4х + (3 + n) = 0.***Ответы*:а) при n = 0 х =1, при n = 2 х = 2, при n =2 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image181_0000.gif;б) при n = 0 х = -http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image183_0000.gif, при n = 1 х = 2, при n = - 4 х = http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image185_0001.gif;в) при n= 0 х = - http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image187_0000.gif, при n = 1 х = - 2, при n =4 х = - http://festival.1september.ru/articles/531229/full_image185_0002.gif. |

**Задание:**

1. На листке записать фамилию, номер варианта и код ответов.

2. Проверить правильность своего кода с ключом учителя.

**Домашнее задание**: решить самостоятельно:

1. При каких значениях а уравнение а = имеет более трех корней?

*Ответ*: а [3; 5).

2. При каждом значении параметра а решите уравнение = х – а.

*Ответ*: если а (- , решений нет

если а [- ] (- 3; 3], то х = ;

если а (- 3], то х = .

3. Сколько корней в зависимости от параметра а имеет уравнение *n*х = а?

*Ответ*: если а (, то уравнение имеет два решения;

если а , то уравнение имеет одно решение;

если а ( -; ), то уравнение не имеет решений.

**Рефлексия**. Выбери для себя цвет и определи



**Анализ результатов**.

1) Предложенный тестовый контроль помог выявить результаты:

* на «5» - 28 %
* на «4» - 51 %
* на «3» - 21 %

2) Рефлексия позволила выявить, что у

* 54 % учащихся урок вызвал повышенный интерес к теме;
* 46 % - интерес;
* 36 % - учащихся помог систематизировать.

**Литература.**

1. П.В.Чулков «Уравнения и неравенства в школьном курсе математики» (лекции 5-8) Москва, Педагогический университет «Первое сентября», 2006 г.
2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике. М. Наука, 1970
3. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи с параметрами по алгебре и анализу, 1998 г.